



International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Matemáticas

Nivel Superior

Exámenes de muestra: prueba 1, 2 y 3

Para primeros exámenes en 2014

ÍNDICE

Ejemplos de preguntas de Matemáticas Nivel Superior: prueba 1

Ejemplo de esquema de calificación de Matemáticas Nivel Superior: prueba 1

Ejemplos de preguntas de Matemáticas Nivel Superior: prueba 2

Ejemplo de esquema de calificación de Matemáticas Nivel Superior: prueba 2

MATEMÁTICAS DISCRETAS

Examen de muestra de Matemáticas Nivel Superior: prueba 3

Esquema de calificación: prueba 3

ANÁLISIS

Examen de muestra de Matemáticas Nivel Superior: prueba 3

Esquema de calificación: prueba 3

CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Examen de muestra de Matemáticas Nivel Superior: prueba 3

Esquema de calificación: prueba 3

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Examen de muestra de Matemáticas Nivel Superior: prueba 3

Esquema de calificación: prueba 3



MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Número de convocatoria del alumno

0	0								
---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

EXAMEN DE MUESTRA

Código del examen

x	x	x	x	–	x	x	x	x
---	---	---	---	---	---	---	---	---

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en las hojas de respuesta provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS* para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es [120 puntos].

NO escriba soluciones en esta página.

SECCIÓN B

Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 12]

Considere los números complejos $z_1 = 2 \operatorname{cis} 150^\circ$ y $z_2 = -1 + i$.

- (a) Calcule $\frac{z_1}{z_2}$, dando la respuesta tanto en forma módulo-argumental como en forma cartesiana. [7 puntos]
- (b) Utilizando los resultados anteriores, halle el valor exacto de $\operatorname{tg} 75^\circ$, expresando la respuesta de la forma $a + \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$. [5 puntos]

11. [Puntuación máxima: 19]

- (a) Halle el valor de la integral $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} \, dx$. [7 puntos]
- (b) Halle el valor de la integral $\int_0^{0.5} \arcsen x \, dx$. [5 puntos]
- (c) Utilizando la sustitución $t = \operatorname{tg} \theta$, halle el valor de la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{3 \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}. \quad [7 \text{ puntos}]$$

12. [Puntuación máxima: 15]

La función f viene dada por $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$.

- (a) Muestre que $f''(x) = 2e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. [3 puntos]
- (b) Obtenga una expresión similar para $f^{(4)}(x)$. [4 puntos]
- (c) Sugiera una expresión para $f^{(2n)}(x)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, y demuestre dicha conjetura utilizando la inducción matemática. [8 puntos]

NO escriba soluciones en esta página.

13. [Puntuación máxima: 14]

La función f viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ ax^2 + bx - 5, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Sabiendo que tanto f como su derivada f' son funciones continuas para todos los valores pertenecientes al dominio de f , halle el valor de a y de b . [6 puntos]
- (b) Muestre que f es una función inyectiva. [3 puntos]
- (c) Obtenga expresiones para la función inversa f^{-1} e indique sus dominios respectivos. [5 puntos]
-



ESQUEMA DE CALIFICACIÓN

EXAMEN DE MUESTRA

MATEMÁTICAS

Nivel Superior

Prueba 1

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede también haber quedado implícito en un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede también haber quedado implícita en un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando **no** se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Escriba las puntuaciones en rojo en el margen derecho de la hoja de examen que contiene las respuestas del alumno.

- Muestre el **desglose** con las puntuaciones individuales concedidas. Utilice para ello las abreviaturas **MI**, **AI**, etc.
- Escriba al final de cada pregunta la puntuación total conseguida en esa **pregunta** y **rodee** dicho valor.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima solo porque la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta según las directrices del esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **AI**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de las puntuaciones **M** precedentes, de haber alguna.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej. **MIAI**), esto normalmente significa **MI** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **AI** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida las puntuaciones.
- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado, ignore todo el procedimiento subsiguiente.

3 Puntuaciones N

Conceda puntos N por respuestas **correctas** que **no** vengan acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos N y de otro tipo de puntuación.
- Es posible que se hayan incluido en una prueba menos puntos N que el total de puntos M , A y R ; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis**; p. ej., (MI). Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la siguiente línea.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando el procedimiento **aparezca por escrito** explícitamente.

5 Puntuación de arrastre de error

Las puntuaciones de arrastre de error (FT , del inglés *Follow-Through*) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (FT), el alumno **tiene que haber incluido el procedimiento** empleado (no solo una respuesta final basada en una respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos FT si así lo considera oportuno.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen } \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).
- Dentro de un apartado dado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo A **que dependan del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos M si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (MR , del inglés *mis-read*). Aplique a esa pregunta una penalización MR de 1 punto. Puntúe la pregunta siguiendo los criterios habituales y, a continuación, escriba $-1(MR)$ al lado del total. Reste 1 punto del total correspondiente a esa pregunta. A un alumno sólo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado.

- Si a causa del error de lectura (MR) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si así lo considera oportuno.
- Si este error de lectura (MR) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen } \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).

7 Puntuación discrecional (*d*)

En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación. Esta puntuación tiene que estar rotulada con una (**d**) y se ha de incluir al lado de la puntuación una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar siguiendo las directrices que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con su jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados con **MÉTODO 1**, **MÉTODO 2**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante **O BIEN... O BIEN**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas opciones.

9 Formas alternativas

A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **accepte** formas equivalentes.

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos a menudo no incluyen en los exámenes) aparecen normalmente escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta o bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (si es que la ha incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\sin(5x - 3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x - 3))5 \quad (= 10\cos(5x - 3)) \quad \text{AI}$$

Se ha de conceder **AI** por $(2\cos(5x - 3))5$, incluso aunque el alumno no haya escrito $10\cos(5x - 3)$.

10 Precisión de las respuestas

El método para abordar los errores de precisión a nivel global, de todo el examen, por medio de Penalizaciones de Precisión (AP, del inglés Accuracy Penalty) ya no es válido.

A los examinadores se les facilitarán, para cada pregunta donde resulte pertinente, las instrucciones (específicas para esa pregunta) relativas a dichos aspectos numéricos, siempre dentro del marco de la corrección matemática, la comprensión numérica y la adecuación contextual.

*Las instrucciones que aparecen en la portada de cada cuestionario de examen se incluyen para que le sirvan de orientación al alumno. En ocasiones, el esquema de calificación (EC) contiene instrucciones para el examinador del tipo “Acepte respuestas que se hayan redondeado a n cifras significativas (cs)”. Cuando el alumno proporcione respuestas (solicitadas en la pregunta) con menos de n cs , conceda **A0**. Es posible que el EC requiera algunas respuestas numéricas intermedias que no se hayan solicitado explícitamente en la pregunta. En esos casos, conceda los puntos únicamente si el alumno da la respuesta como valor exacto o con al menos 2 cs .*

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento incluido en el examen (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

No se permite el uso de calculadoras. El uso de cualquier tipo de calculadora durante la prueba 1 se considera conducta fraudulenta y, como consecuencia de ello, no se concederá ninguna calificación final. Si se topa con un ejercicio que sugiera que el alumno pudiera haber utilizado algún tipo de calculadora, siga por favor los procedimientos establecidos para abordar la conducta fraudulenta. Ejemplos: hallar un ángulo a partir de una razón trigonométrica de 0,4235.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador sólo ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

SECCIÓN A

1. (a) $\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$ *AI*
[1 punto]
- (b) $\text{tg } 2\theta = \frac{2 \times \sqrt{8}}{1-8} = -\frac{2\sqrt{8}}{7} \left(-\frac{4\sqrt{2}}{7} \right)$ *MIAI*
[2 puntos]
- (c) $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3}$ *MIAI*
 $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ *AI*
[3 puntos]
Total [6 puntos]
2. (a) suma = $\frac{45}{9}$, producto = $\frac{40}{9}$ *AI*
[1 punto]
- (b) se deduce que $3\alpha = \frac{45}{9}$ y $\alpha(\alpha^2 - \beta^2) = \frac{40}{9}$ *AIAI*
 resolviendo, $\alpha = \frac{5}{3}$ *AI*
 $\frac{5}{3}\left(\frac{25}{9} - \beta^2\right) = \frac{40}{9}$ *MI*
 $\beta = (\pm)\frac{1}{3}$ *AI*
 las otras dos raíces son $2, \frac{4}{3}$ *AI*
[6 puntos]
Total [7 puntos]

3. (a) $P(\text{tirar } n \text{ monedas y que no salga ninguna cara}) = 0,5^n$ (A1)

$$P(\text{ninguna cara}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{7}{24}$$

MI
AI

[3 puntos]

- (b) $P(2 | \text{ninguna cara}) = \frac{P(2 \text{ monedas y ninguna cara})}{P(\text{ninguna cara})}$ MI

$$= \frac{1}{\frac{7}{24}}$$

$$= \frac{24}{7}$$

$$= \frac{2}{7}$$

AI
AI

[3 puntos]

Total [6 puntos]

4. (a) $E(X) = \int_0^1 12x^3(1-x)dx$ MI

$$= 12 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{5}$$

AI
AI

[3 puntos]

- (b) $f'(x) = 12(2x - 3x^2)$ AI

en la moda $f'(x) = 12(2x - 3x^2) = 0$ MI

por lo tanto, la moda $= \frac{2}{3}$ AI

[3 puntos]

Total [6 puntos]

5. (a) $f(-x) = 2 \cos(-x) + (-x) \sin(-x)$ MI

$$= 2 \cos x + x \sin x \quad (= f(x))$$

AI

por lo tanto, f es par AI

[3 puntos]

- (b) $f'(x) = -2 \sin x + \sin x + x \cos x \quad (= -\sin x + x \cos x)$ AI

$$f''(x) = -\cos x + \cos x - x \sin x \quad (= -x \sin x)$$

AI

de modo que $f''(0) = 0$ AG

[2 puntos]

continúa ...

Continuación de la Pregunta 5

- (c) el razonamiento de John es incorrecto porque
 o bien; hay un punto estacionario en $(0, 2)$ y, dado que f es una función par, y por lo tanto simétrica respecto al eje y , tiene que tratarse de un máximo o de un mínimo
 o bien; $f''(x)$ es par y, por consiguiente, tiene el mismo signo a ambos lados de $(0, 2)$
- R2**
[2 puntos]
Total [7 puntos]

6. (a) $BC^2 = 12 + 81 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 147$
 $BC = 7\sqrt{3}$
- MIAI**
AI
[3 puntos]

- (b) área del triángulo $ABC = \frac{1}{2} \times 9 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \left(= \frac{9\sqrt{3}}{2} \right)$
 y, por lo tanto, $\frac{1}{2} \times AD \times 7\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$
 $AD = \frac{9}{7}$
- MIAI**
MI
AI
[4 puntos]
Total [7 puntos]

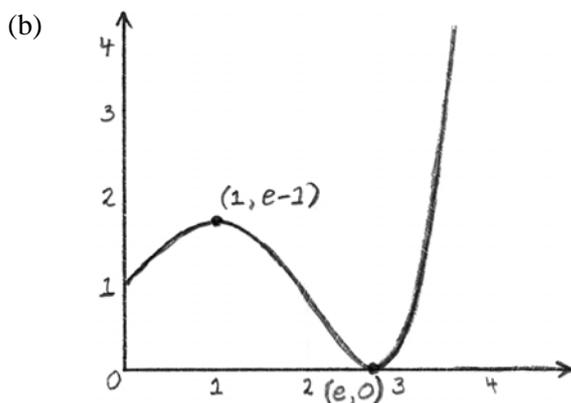
7. (a) haciendo uso de las operaciones con filas,
 para obtener 2 ecuaciones, ambas con las mismas 2 variables
 por ejemplo $y - z = 1$
 $2y - 2z = \lambda - 1$
 el hecho de que el miembro de la izquierda de una de las ecuaciones sea un múltiplo del miembro de la izquierda de la otra ecuación indica que las ecuaciones no tienen una solución única, o equivalente
- MI**
AIAI
RIAG
[4 puntos]
- (b) (i) $\lambda = 3$ **AI**
- (ii) si tomamos $z = \mu$ **MI**
 entonces, $y = 1 + \mu$ **AI**
 y $x = -2\mu$ o equivalente **AI**
- [4 puntos]**
Total [8 puntos]

8. aplicando el producto cruzado con a , **MI**
 $a \times (a + b + c) = a \times 0 = 0$ **AI**
 haciendo uso de las propiedades algebraicas de los vectores y el hecho de que $a \times a = 0$
 $a \times b + a \times c = 0$ **MI**
 $a \times b = c \times a$ **AI**
 $a \times b = c \times a$ **AG**
 aplicando el producto cruzado con b , **MI**
 $b \times (a + b + c) = 0$
 $b \times a + b \times c = 0$ **AI**
 $a \times b = b \times c$ **AG**
 con esto se completa la demostración

[6 puntos]

9. (a) (i) $f'(x) = e^x - ex^{e-1}$ **AI**
 (ii) mediante inspección se deduce que las dos raíces son 1, e **AI AI**

[3 puntos]



A3

Nota: Conceda **AI** por el máximo, **AI** por el mínimo y **AI** por la forma general de la curva.

[3 puntos]

- (c) a partir del gráfico: $e^x > x^e$ para todo $x > 0$ excepto $x = e$ **RI**
 tomando $x = \pi$, se concluye que $e^\pi > \pi^e$ **AG**

[1 punto]

Total [7 puntos]

SECCIÓN B

10. (a) en forma cartesiana

$$z_1 = 2 \times -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2}i$$

MI

$$= -\sqrt{3} + i$$

AI

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-\sqrt{3} + i}{-1 + i}$$

$$= \frac{(-\sqrt{3} + i)}{(-1 + i)} \times \frac{(-1 - i)}{(-1 - i)}$$

MI

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}i$$

AI

en forma módulo-argumental

$$z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 135^\circ$$

AI

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \operatorname{cis} 150^\circ}{\sqrt{2} \operatorname{cis} 135^\circ}$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{cis} 15^\circ$$

AIAI

[7 puntos]

(b) al igualar las dos expresiones correspondientes a $\frac{z_1}{z_2}$

$$\cos 15^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

AI

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

AI

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

MI

$$= \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

AI

$$= 2 + \sqrt{3}$$

AI

[5 puntos]

Total [12 puntos]

11. (a) sea $x = 2 \operatorname{sen} \theta$ **MI**
 $dx = 2 \cos \theta d\theta$ **AI**
 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos \theta \times 2 \cos \theta d\theta \quad \left(= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta \right)$ **AIAI**

Nota: Conceda **AI** por los límites y **AI** por la expresión.

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \quad \text{AI}$$

$$= 2 \left[\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad \text{AI}$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2} \quad \text{AI}$$

[7 puntos]

- (b) $I = [x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x]_0^{0.5} - \int_0^{0.5} x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ **MIAIAI**
 $= [x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x]_0^{0.5} + [\sqrt{1-x^2}]_0^{0.5}$ **AI**
 $= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ **AI**

[5 puntos]

- (c) $dt = \sec^2 \theta d\theta, \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \rightarrow [0, 1]$ **AI(AI)**
- $$I = \int_0^1 \frac{\frac{dt}{(1+t^2)}}{\frac{3}{(1+t^2)} + \frac{t^2}{(1+t^2)}} \quad \text{MI(AI)}$$
- $$= \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} \quad \text{AI}$$
- $$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 \quad \text{AI}$$
- $$= \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \quad \text{AI}$$

[7 puntos]

Total [19 puntos]

12. (a) $f'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$ *AI*
 $f''(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x$ *AI*
 $= 2e^x \cos x$ *AI*
 $= 2e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *AG*

[3 puntos]

(b) $f'''(x) = 2e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *AI*
 $f^{(4)}(x) = 2e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *AI*
 $= 4e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *AI*
 $= 4e^x \operatorname{sen}(x + \pi)$ *AI*

[4 puntos]

(c) la conjetura es que
 $f^{(2n)}(x) = 2^n e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ *AI*

para $n = 1$, de esta fórmula se obtiene

$f''(x) = 2e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, que es correcta *AI*

supongamos que el resultado es verdadero para $n = k$, (es decir, $f^{(2k)}(x) = 2^k e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$)

MI

consideremos ahora $f^{(2k+1)}(x) = 2^k e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + 2^k e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ *MI*

$f^{(2(k+1))}(x) = 2^k e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + 2^k e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + 2^k e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) - 2^k e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$

AI

$= 2^{k+1} e^x \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ *AI*

$= 2^{k+1} e^x \operatorname{sen}\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$ *AI*

por lo tanto, verdadero para $n = k \Rightarrow$ verdadero para $n = k + 1$, y dado

que es verdadero para $n = 1$, el resultado queda demostrado por inducción *RI*

Nota: Conceda la puntuación *RI* final únicamente si se han concedido las dos puntuaciones *M* anteriores.

[8 puntos]

Total [15 puntos]

13. (a) f es continua $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ *MI*
 $4a + 2b = 8$ *AI*
 $f'(x) = \begin{cases} 2, & x < 2 \\ 2ax + b, & 2 < x < 3 \end{cases}$ *AI*
 f' es continua $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x)$
 $4a + b = 2$ *AI*
 se resuelve el sistema de ecuaciones *MI*
 para así obtener $a = -1$ and $b = 6$ *AI*
[6 puntos]
- (b) para $x \leq 2$, $f'(x) = 2 > 0$ *AI*
 para $2 < x < 3$, $f'(x) = -2x + 6 > 0$ *AI*
 dado que $f'(x) > 0$ para todos los valores pertenecientes al dominio de f ,
 f es creciente *RI*
 y, por tanto, inyectiva *AG*
[3 puntos]
- (c) $x = 2y - 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2}$ *MI*
 $x = -y^2 + 6y - 5 \Rightarrow y^2 - 6y + x + 5 = 0$ *MI*
 $y = 3 \pm \sqrt{4-x}$
 por lo tanto:
 $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x \leq 3 \\ 3 - \sqrt{4-x}, & 3 < x < 4 \end{cases}$ *AIAIAI*

Nota: Conceda *AI* por la primera recta y *AIAI* por la segunda recta.

[5 puntos]

Total [14 puntos]



MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Número de convocatoria del alumno

0	0								
---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

EXAMEN DE MUESTRA

Código del examen

x	x	x	x	–	x	x	x	x
---	---	---	---	---	---	---	---	---

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en las hojas de respuesta provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS* para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es [120 puntos].

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste **todas** las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

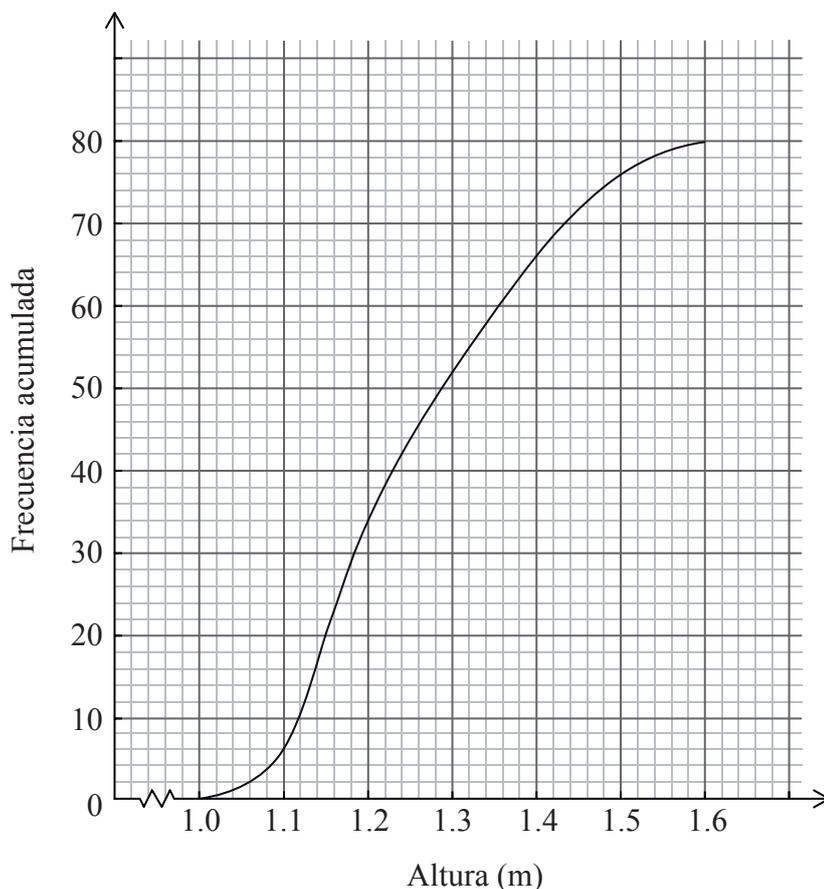
1. [Puntuación máxima: 6]

Sabiendo que $(x - 2)$ es un factor de $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ y que al dividir $f(x)$ entre $(x - 1)$ el resto es igual a -6 , halle el valor de a y el valor de b .



3. [Puntuación máxima: 6]

Se midió la altura de todos los niños que empiezan el curso en un colegio dado y se elaboró el siguiente gráfico de frecuencias acumuladas.



(a) Complete la tabla de frecuencias agrupadas correspondiente a estos datos.

[2 puntos]

Intervalo	Frecuencia
]1,0, 1,1]	
]1,1, 1,2]	
]1,2, 1,3]	
]1,3, 1,4]	
]1,4, 1,5]	
]1,5, 1,6]	

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

9. [Puntuación máxima: 7]

Una escalera de mano de 10 m de longitud está apoyada sobre un terreno horizontal y contra una pared vertical. La parte inferior de la escalera se va separando de la pared a una velocidad constante de $0,5 \text{ ms}^{-1}$. Calcule la velocidad a la que está descendiendo la parte superior de la escalera cuando la parte inferior de la misma se encuentra a una distancia de 4 m de la pared.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

NO escriba soluciones en esta página.

SECCIÓN B

Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 12]

Las coordenadas de los puntos A y B respecto al origen O son (1, 2, 3) y (3, 1, 2).

(a) (i) Halle $\vec{OA} \times \vec{OB}$.

(ii) Determine el área del triángulo OAB.

(iii) Halle la ecuación cartesiana del plano OAB.

[5 puntos]

(b) (i) Halle la ecuación vectorial de la recta L_1 a la que pertenecen los puntos A y B.

(ii) La recta L_2 tiene la siguiente ecuación vectorial:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Determine si L_1 y L_2 son rectas alabeadas.

[7 puntos]

NO escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 13]

Un banco ofrece un préstamo de $\$P$ al comienzo de un mes dado, a un tipo de interés mensual de I . El interés se calcula al final de cada mes y se va añadiendo a la deuda pendiente. Al final de cada mes hay que realizar una amortización de $\$R$. Sea $\$S_n$ la deuda pendiente inmediatamente después de haber realizado la n -ésima amortización mensual.

- (a) (i) Halle una expresión para S_1 , y muestre que:

$$S_2 = P \left(1 + \frac{I}{100} \right)^2 - R \left(1 + \left(1 + \frac{I}{100} \right) \right).$$

- (ii) Determine una expresión similar para S_n . A partir de lo anterior, muestre que:

$$S_n = P \left(1 + \frac{I}{100} \right)^n - \frac{100R}{I} \left(\left(1 + \frac{I}{100} \right)^n - 1 \right). \quad [7 \text{ puntos}]$$

- (b) Sue pide un préstamo por valor de $\$5000$ a un tipo de interés mensual del 1%. Tiene pensado devolver el préstamo en 5 años (es decir, 60 meses).

- (i) Calcule la amortización mensual que necesita realizar, redondeando la respuesta a dos cifras decimales.
- (ii) Al cabo de 20 meses, Sue hereda algo de dinero y decide pagar en ese momento todo lo que le queda por devolver del préstamo. ¿Cuánto dinero tendrá que pagar? Dé la respuesta redondeando al $\$$ más cercano. [6 puntos]

NO escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 17]

Los pesos, en kg, de los machos de una determinada especie de ave siguen una distribución normal, de media μ y desviación típica σ .

- (a) Sabiendo que el 70 % de dichas aves pesa más de 2,1 kg y que el 25 % de dichas aves pesa más de 2,5 kg, calcule el valor de μ y el valor de σ . [4 puntos]
- (b) Se toma una muestra aleatoria compuesta por diez de estas aves. Sea X el número de aves de la muestra que pesan más de 2,5 kg.
- (i) Calcule $E(X)$.
- (ii) Calcule la probabilidad de que exactamente cinco de estas aves pesen más de 2,5 kg.
- (iii) Determine el valor más probable de X . [5 puntos]
- (c) El número de huevos, Y , que ponen las hembras de esta especie durante la época de nidificación sigue una distribución de Poisson de media λ . Se sabe que $P(Y \geq 2) = 0,80085$, redondeando a 5 cifras decimales.
- (i) Determine el valor de λ .
- (ii) Calcule la probabilidad de que dos hembras elegidas al azar pongan entre las dos un total de dos huevos.
- (iii) Sabiendo que esas dos hembras han puesto entre las dos un total de dos huevos, calcule la probabilidad de que cada una haya puesto un huevo. [8 puntos]

NO escriba soluciones en esta página.

13. [Puntuación máxima: 18]

La función f viene dada en el dominio $[0, 2]$ por $f(x) = \ln(x+1)\text{sen}(\pi x)$.

- (a) Obtenga una expresión para $f'(x)$. [3 puntos]
 - (b) Dibuje aproximadamente el gráfico de f y el de f' en los mismos ejes, mostrando claramente todas las intersecciones con el eje x . [4 puntos]
 - (c) Halle las coordenadas x de los dos puntos de inflexión que tiene el gráfico de f . [2 puntos]
 - (d) Halle la ecuación de la normal al gráfico de f en $x = 0,75$, expresando la respuesta de la forma $y = mx + c$. [3 puntos]
 - (e) Considere los puntos $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ y $C(c, f(c))$ donde a , b y c ($a < b < c$) son las soluciones de la ecuación $f(x) = f'(x)$. Halle el área del triángulo ABC. [6 puntos]
-



ESQUEMA DE CALIFICACIÓN

EXAMEN DE MUESTRA

MATEMÁTICAS

Nivel Superior

Prueba 2

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede también haber quedado implícito en un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede también haber quedado implícita en un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando **no** se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Escriba las puntuaciones en rojo en el margen derecho de la hoja de examen que contiene las respuestas del alumno.

- Muestre el **desglose** con las puntuaciones individuales concedidas. Utilice para ello las abreviaturas **MI**, **AI**, etc.
- Escriba al final de cada pregunta la puntuación total conseguida en esa **pregunta** y **rodee** dicho valor.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima solo porque la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta según las directrices del esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **AI**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de las puntuaciones **M** precedentes, de haber alguna.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej. **MIAI**), esto normalmente significa **MI** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **AI** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida las puntuaciones.
- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado, ignore todo el procedimiento subsiguiente.

3 Puntuaciones N

Conceda puntos N por respuestas **correctas** que **no** vengan acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos N y de otro tipo de puntuación.
- Es posible que se hayan incluido en una prueba menos puntos N que el total de puntos M , A y R ; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis**; p. ej., (MI). Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la siguiente línea.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando el procedimiento **aparezca por escrito** explícitamente.

5 Puntuación de arrastre de error

Las puntuaciones de arrastre de error (FT , del inglés *Follow-Through*) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (FT), el alumno **tiene que haber incluido el procedimiento** empleado (no solo una respuesta final basada en una respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos FT si así lo considera oportuno.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen } \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).
- Dentro de un apartado dado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo A **que dependan del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos M si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (MR , del inglés *mis-read*). Aplique a esa pregunta una penalización MR de 1 punto. Puntúe la pregunta siguiendo los criterios habituales y, a continuación, escriba $-1(MR)$ al lado del total. Reste 1 punto del total correspondiente a esa pregunta. A un alumno sólo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado.

- Si a causa del error de lectura (MR) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si así lo considera oportuno.
- Si este error de lectura (MR) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen } \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).

7 Puntuación discrecional (*d*)

En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación. Esta puntuación tiene que estar rotulada con una (**d**) y se ha de incluir al lado de la puntuación una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar siguiendo las directrices que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con su jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados con **MÉTODO 1**, **MÉTODO 2**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante **O BIEN... O BIEN**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas opciones.

9 Formas alternativas

A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos a menudo no incluyen en los exámenes) aparecen normalmente escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta o bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (si es que la ha incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\sin(5x - 3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x - 3))5 \quad (= 10\cos(5x - 3)) \quad \text{AI}$$

Se ha de conceder **AI** por $(2\cos(5x - 3))5$, incluso aunque el alumno no haya escrito $10\cos(5x - 3)$.

10 Precisión de las respuestas

El método para abordar los errores de precisión a nivel global, de todo el examen, por medio de Penalizaciones de Precisión (AP, del inglés Accuracy Penalty) ya no es válido.

A los examinadores se les facilitarán, para cada pregunta donde resulte pertinente, las instrucciones (específicas para esa pregunta) relativas a dichos aspectos numéricos, siempre dentro del marco de la corrección matemática, la comprensión numérica y la adecuación contextual.

Las instrucciones que aparecen en la portada de cada cuestionario de examen se incluyen para que le sirvan de orientación al alumno. En ocasiones, el esquema de calificación (EC) contiene instrucciones para el examinador del tipo “Acepte respuestas que se hayan redondeado a n cifras significativas (cs)”. Cuando el alumno proporcione respuestas (solicitadas en la pregunta) con menos de n cs, conceda A0. Es posible que el EC requiera algunas respuestas numéricas intermedias que no se hayan solicitado explícitamente en la pregunta. En esos casos, conceda los puntos únicamente si el alumno da la respuesta como valor exacto o con al menos 2 cs.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento incluido en el examen (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador sólo ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

SECCIÓN A

1. $f(2) = 8 + 4a + 2b - 4 = 0$
 $\Rightarrow 4a + 2b = -4$
 $f(1) = 1 + a + b - 4 = -6$
 $\Rightarrow a + b = -3$
 resolviendo, $a = 1, b = -4$

MI
AI
MI
AI
AIAI

[6 puntos]

2. el enunciado dice que $ar^2 = 9$ y que $\frac{a}{1-r} = 64$

AI

dividiendo $r^2(1-r) = \frac{9}{64}$

MI

$64r^3 - 64r^2 + 9 = 0$
 $r = 0,75; a = 16$

AI
AIAI

[5 puntos]

3. (a)

Intervalo	Frecuencia
]1,0, 1,1]	6
]1,1, 1,2]	28
]1,2, 1,3]	18
]1,3, 1,4]	14
]1,4, 1,5]	10
]1,5, 1,6]	4

A2

[2 puntos]

- (b) $\mu = 1,26; \sigma = 0,133$

AIAI

[2 puntos]

- (c) no, porque la distribución normal es simétrica y estos datos no lo son

R2

[2 puntos]

Total [6 puntos]

4. (a) $\text{mod}(z) = 2, \text{arg}(z) = 150^\circ$ AIAI
[2 puntos]
- (b) $z^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$ (MI)
 $= 0,810 + 0,965i$ AI
[2 puntos]
- (c) tenemos que hallar un múltiplo de 150 que sea también múltiplo de 360,
 por lo que sea cual sea el método utilizado, MI
 $n = 12$ AI

Nota: Conceda únicamente 1 punto por el apartado (c) si $n = 12$ está basado en $\text{arg}(z) = -30$.

[2 puntos]

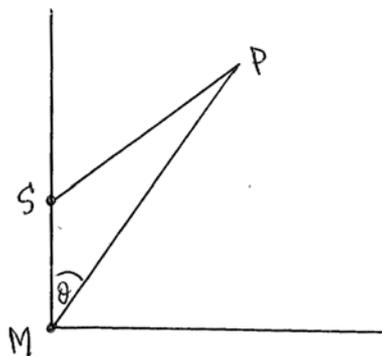
Total [6 puntos]

5. (a) (i) distancia de O $= \int_0^3 v dt$ (MI)
 $= 0,703 \text{ (m)}$ AI
- (ii) distancia total recorrida $= \int_0^3 |v| dt$ (MI)
 $= 2,05 \text{ (m)}$ AI
[4 puntos]
- (b) resolviendo la ecuación $\int_0^t |\cos(u^2)| du = 1$ (MI)
 $t = 1,39 \text{ (s)}$ AI
[2 puntos]

Total [6 puntos]

6. asíntota vertical $x = -4 \Rightarrow -4b + c = 0$ MI
- asíntota horizontal $y = -2 \Rightarrow \frac{1}{b} = -2$ MI
- $b = -\frac{1}{2}$ y $c = -2$ AIAI
- $1 = \frac{\frac{2}{3} + a}{-\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - 2}$ MI
- $a = -3$ AI
[6 puntos]

7.



- (a) supongamos que la intercepción se produce en el punto P, transcurridas t horas desde las 12:00 en ese caso, $SP = 20t$ y $MP = 30t$ aplicando el teorema del seno,

$$\frac{SP}{MP} = \frac{2}{3} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } 135}$$

de donde se deduce que $\theta = 28,1$

AI

MIAI

AI

[4 puntos]

- (b) aplicando de nuevo el teorema del seno,

$$\frac{MP}{MS} = \frac{\text{sen } 135}{\text{sen } (45 - 28,1255\dots)}$$

$$30t = 10 \times \frac{\text{sen } 135}{\text{sen } 16,8745\dots}$$

$$t = 0,81199\dots$$

la intercepción se produce a las 12:49

MIAI

MI

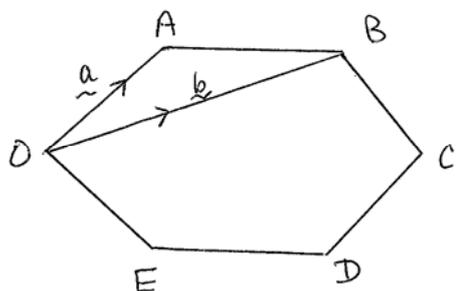
AI

AI

[5 puntos]

Total [9 puntos]

8.



(a) $OC = AB + OA \cos 60 + BC \cos 60$
 $= AB + AB \times \frac{1}{2} + AB \times \frac{1}{2}$
 $= 2AB$

MI

AI

AG

[2 puntos]

(b) $\vec{OC} = 2\vec{AB} = 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

MIAI

$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD}$

MI

$= \vec{OC} + \vec{AO}$

AI

$= 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} - \mathbf{a} = 2\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$

AI

$\vec{OE} = \vec{BC}$

MI

$= 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

AI

[7 puntos]

Total [9 puntos]

9. sean x, y (m) la distancia a la que se encuentra de la pared la parte inferior de la escalera y la distancia a la que se encuentra del suelo la parte superior de la escalera, respectivamente

entonces

$x^2 + y^2 = 100$

MIAI

$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$

MIAI

cuando $x = 4, y = \sqrt{84}$ y $\frac{dx}{dt} = 0,5$

AI

sustituyendo $2 \times 4 \times 0,5 + 2\sqrt{84} \frac{dy}{dt} = 0$

AI

$\frac{dy}{dt} = -0,218 \text{ ms}^{-1}$

AI

(la velocidad a la que está descendiendo es $0,218 \text{ ms}^{-1}$)

[7 puntos]

SECCIÓN B

- 10.** (a) (i) $\vec{OA} \times \vec{OB} = i + 7j - 5k$ *AI*
- (ii) $\text{área} = \frac{1}{2} |i + 7j - 5k| = \frac{5\sqrt{3}}{2} (4,33)$ *MIAI*
- (iii) la ecuación del plano es $x + 7y - 5z = k$ *MI*
 $x + 7y - 5z = 0$ *AI*
- [5 puntos]*
- (b) (i) dirección de la recta $= (3i + j + 2k) - (i + 2j + 3k) = 2i - j - k$ *MIAI*
 la ecuación de la recta es
 $r = (i + 2j + 3k) + \lambda(2i - j - k)$ *AI*
- (ii) en el punto de intersección,
 $1 + 2\lambda = 2 + \mu$
 $2 - \lambda = 4 + 3\mu$ *MIAI*
 $3 - \lambda = 3 + 2\mu$
 resolviendo la 2.^a y la 3.^a ecuación: $\lambda = 4, \mu = -2$ *AI*
 estos valores no satisfacen la 1.^a ecuación, por lo que las rectas
 son alabeadas *RI*
- [7 puntos]*
- Total [12 puntos]**

11. (a) (i) $S_1 = P\left(1 + \frac{I}{100}\right) - R$ *AI*

$$S_2 = P\left(1 + \frac{I}{100}\right)^2 - R\left(1 + \frac{I}{100}\right) - R$$
MIAI

$$= P\left(1 + \frac{I}{100}\right)^2 - R\left(1 + \left(1 + \frac{I}{100}\right)\right)$$
AG

(ii) ampliando esta secuencia

$$S_n = P\left(1 + \frac{I}{100}\right)^n - R\left(1 + \left(1 + \frac{I}{100}\right) + \dots + \left(1 + \frac{I}{100}\right)^{n-1}\right)$$
MIAI

$$= P\left(1 + \frac{I}{100}\right)^n - \frac{R\left(\left(1 + \frac{I}{100}\right)^n - 1\right)}{\frac{I}{100}}$$
MIAI

$$= P\left(1 + \frac{I}{100}\right)^n - \frac{100R}{I}\left(\left(1 + \frac{I}{100}\right)^n - 1\right)$$
AG

[7 puntos]

(b) (i) tomando $S_{60} = 0$, $P = 5000$, $I = 1$ *MI*

$$5000 \times 1,01^{60} = 100R(1,01^{60} - 1)$$
AI

$$R = (\$)111,22$$
AI

(ii) en este caso tenemos que $n = 20$, $P = 5000$, $I = 1$, $R = 111,22$ *MI*

$$S_{20} = 5000 \times 1,01^{20} - 100 \times 111,22(1,01^{20} - 1)$$
AI

$$= (\$)3652$$
AI

que es la deuda pendiente

[6 puntos]

Total [13 puntos]

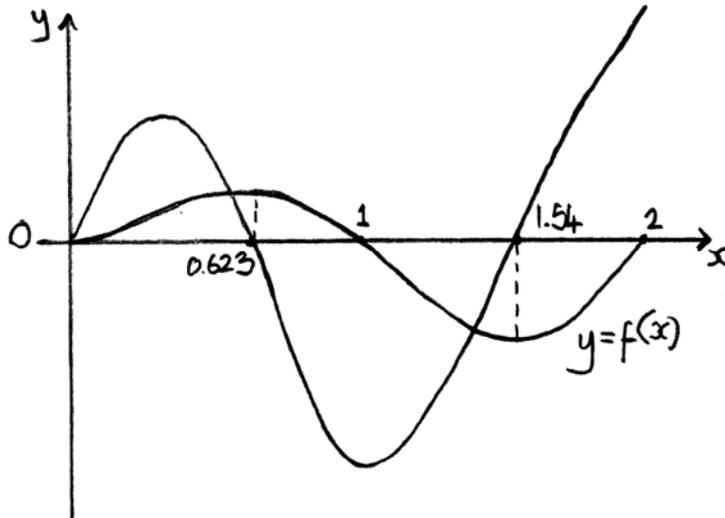
12. (a) el enunciado dice que:
 $2,1 = \mu - 0,5244\sigma$
 $2,5 = \mu + 0,6745\sigma$
 $\mu = 2,27, \sigma = 0,334$ *MIAI*
AIAI
[4 puntos]
- (b) (i) sea X el número de aves de la muestra que pesan más de 2,5 kg
 entonces X es $B(10, 0,25)$ *AI*
 $E(X) = 2,5$ *AI*
- (ii) 0,0584 *AI*
- (iii) para hallar el valor más probable de X , hay que considerar
 $p_0 = 0,0563\dots, p_1 = 0,1877\dots, p_2 = 0,2815\dots, p_3 = 0,2502\dots$ *MI*
 por consiguiente, el valor más probable = 2 *AI*
[5 puntos]
- (c) (i) resolvemos $1 - P(Y \leq 1) = 0,80085$ utilizando
 la calculadora de pantalla gráfica *MI*
 $\lambda = 3,00$ *AI*
- (ii) sean X_1, X_2 el número de huevos que ha puesto cada ave
 $P(X_1 + X_2 = 2) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 0)$ *MIAI*
 $= e^{-3} \times e^{-3} \times \frac{9}{2} + (e^{-3} \times 3)^2 + e^{-3} \times \frac{9}{2} \times e^{-3} = 0,0446$ *AI*
- (iii) $P(X_1 = 1, X_2 = 1 | X_1 + X_2 = 2) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1)}{P(X_1 + X_2 = 2)}$ *MIAI*
 $= 0,5$ *AI*
[8 puntos]
- Total [17 puntos]**

13. (a) $f'(x) = \frac{1}{x+1} \text{sen}(\pi x) + \pi \ln(x+1) \cos(\pi x)$

MIAIAI

[3 puntos]

(b)



A4

Nota: Conceda AIAI por los gráficos, y AIAI por las intersecciones.

[4 puntos]

(c) 0,310; 1,12

AIAI

[2 puntos]

(d) $f'(0,75) = -0,839092$

AI

por lo que la ecuación de la normal es $y - 0,39570812 = \frac{1}{0,839092}(x - 0,75)$

MI

$y = 1,19x - 0,498$

AI

[3 puntos]

(e) A(0, 0)

B($\overbrace{0,548\dots}^c$, $\overbrace{0,432\dots}^d$)

AI

C($\overbrace{1,44\dots}^e$, $\overbrace{-0,881\dots}^f$)

AI

Nota: Acepte valores de las coordenadas de B y C que se hayan redondeado a 3 cifras significativas.

área $\Delta ABC = \frac{1}{2} |(ci + dj) \times (ei + fj)|$

MIAI

$= \frac{1}{2} (de - cf)$

AI

$= 0,554$

AI

[6 puntos]

Total [18 puntos]



MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – MATEMÁTICAS DISCRETAS

EXAMEN DE MUESTRA

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS* para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es [60 puntos].

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 9]

- (a) Utilice el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de 259 y 581. [4 puntos]
- (b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle la solución general de la ecuación diofántica $259x + 581y = 7$. [5 puntos]

2. [Puntuación máxima: 13]

El grafo G tiene por vértices P, Q, R, S, T , y la siguiente tabla muestra el número de aristas que unen cada par de vértices.

	P	Q	R	S	T
P	0	1	0	1	2
Q	1	0	1	0	0
R	0	1	0	1	1
S	1	0	1	0	0
T	2	0	1	0	0

- (a) Dibuje el grafo G como un grafo planario. [2 puntos]
- (b) Justificando su respuesta, indique si G es o no
- (i) simple;
 - (ii) conexo;
 - (iii) bipartito. [4 puntos]
- (c) Explique qué característica de G le permite afirmar que este grafo tiene un sendero euleriano y escriba un sendero. [2 puntos]

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 2: continuación)

- (d) Explique qué característica de G le permite afirmar que este grafo no tiene ningún circuito euleriano. [1 punto]
- (e) Halle el máximo número de aristas que se pueden añadir al grafo G (sin incluir ni lazos ni aristas múltiples adicionales) de modo tal que siga siendo planario. [4 puntos]

3. [Puntuación máxima: 12]

- (a) Una versión del pequeño teorema de Fermat establece que, en ciertas condiciones, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
 - (i) Muestre que esto no se cumple para $a = 2$, $p = 9$, e indique cuál es la condición que no se satisface.
 - (ii) Halle el menor valor positivo de k que satisface la congruencia $2^{45} \equiv k \pmod{9}$. [6 puntos]
- (b) Halle todos los números enteros comprendidos entre 100 y 200 que satisfacen el sistema de congruencias $3x \equiv 4 \pmod{5}$ y $5x \equiv 6 \pmod{7}$. [6 puntos]

4. [Puntuación máxima: 12]

En la siguiente tabla se muestra el peso de cada una de las aristas de un grafo G cuyos vértices son A, B, C, D y E.

	A	B	C	D	E
A	–	11	18	12	9
B	11	–	17	13	14
C	18	17	–	16	10
D	12	13	16	–	15
E	9	14	10	15	–

- (a) Empezando en A, utilice el algoritmo del vecino más próximo para hallar para G un límite superior para el problema del “viajante”. [4 puntos]
- (b) (i) Utilice el algoritmo de Kruskal para hallar y dibujar un árbol generador minimal para el subgrafo que se obtiene eliminando de G el vértice A.
- (ii) A partir de lo anterior, utilice el algoritmo de vértice borrado para hallar para G un límite inferior para el problema del “viajante”. [8 puntos]

5. [Puntuación máxima: 14]

- (a) La progresión $\{u_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, satisface la relación de recurrencia $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Sabiendo que $u_1 = u_2 = 3$, obtenga una expresión para u_n en función de n . [6 puntos]
- (b) La progresión $\{v_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, satisface la relación de recurrencia $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$. Sabiendo que $v_1 = 2$ y $v_2 = 12$, utilice el principio de inducción matemática fuerte para mostrar que $v_n = 2^n(2n - 1)$. [8 puntos]
-



ESQUEMA DE CALIFICACIÓN

EXAMEN DE MUESTRA

MATEMÁTICAS MATEMÁTICA DISCRETA

Nivel Superior

Prueba 3

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede también haber quedado implícito en un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede también haber quedado implícita en un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando **no** se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Escriba las puntuaciones en rojo en el margen derecho de la hoja de examen que contiene las respuestas del alumno.

- Muestre el **desglose** con las puntuaciones individuales concedidas. Utilice para ello las abreviaturas **MI**, **AI**, *etc.*
- Escriba al final de cada pregunta la puntuación total conseguida en esa **pregunta** y **rodee** dicho valor.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima solo porque la respuesta sea correcta; **es obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta según las directrices del esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **AI**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de las puntuaciones **M** precedentes, de haber alguna.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (*p. ej. MIAI*), esto normalmente significa **MI** por **intentar** utilizar un método adecuado (*p. ej.*, sustitución en una fórmula) y **AI** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, *etc.*, **no** subdivida las puntuaciones.
- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado, ignore todo el procedimiento subsiguiente.

3 Puntuaciones N

Conceda puntos N por respuestas **correctas** que **no** vengan acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos N y de otro tipo de puntuación.
- Es posible que se hayan incluido en una prueba menos puntos N que el total de puntos M , A y R ; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis**; p. ej., (MI). Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la siguiente línea.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando el procedimiento **aparezca por escrito** explícitamente.

5 Puntuación de arrastre de error

Las puntuaciones de arrastre de error (FT , del inglés Follow-Through) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (FT), el alumno **tiene que haber incluido el procedimiento** empleado (no solo una respuesta final basada en una respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos FT si así lo considera oportuno.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).
- Dentro de un apartado dado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo A **que dependan del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos M si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (MR , del inglés Mis-Read). Aplique a esa pregunta una penalización MR de 1 punto. Puntúe la pregunta siguiendo los criterios habituales y, a continuación, escriba $-1(MR)$ al lado del total. Reste 1 punto del total correspondiente a esa pregunta. A un alumno sólo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado.

- Si a causa del error de lectura (MR) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si así lo considera oportuno.
- Si este error de lectura (MR) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\sin \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).

7 Puntuación discrecional (*d*)

En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación. Esta puntuación tiene que estar rotulada con una (**d**) y se ha de incluir al lado de la puntuación una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar siguiendo las directrices que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con su jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados con **MÉTODO 1**, **MÉTODO 2**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante **O BIEN... O BIEN**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas opciones.

9 Formas alternativas

A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **accepte** formas equivalentes.

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos a menudo no incluyen en los exámenes) aparecen normalmente escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta o bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (si es que la ha incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\sin(5x - 3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x - 3))5 \quad (= 10\cos(5x - 3)) \quad \text{AI}$$

Se ha de conceder **AI** por $(2\cos(5x - 3))5$, incluso aunque el alumno no haya escrito $10\cos(5x - 3)$.

10 Precisión de las respuestas

El método para abordar los errores de precisión a nivel global, de todo el examen, por medio de Penalizaciones de Precisión (AP, del inglés Accuracy Penalty) ya no es válido.

A los examinadores se les facilitarán, para cada pregunta donde resulte pertinente, las instrucciones (específicas para esa pregunta) relativas a dichos aspectos numéricos, siempre dentro del marco de la corrección matemática, la comprensión numérica y la adecuación contextual.

Las instrucciones que aparecen en la portada de cada cuestionario de examen se incluyen para que le sirvan de orientación al alumno. En ocasiones, el esquema de calificación (EC) contiene instrucciones para el examinador del tipo “Acepte respuestas que se hayan redondeado a n cifras significativas (cs)”. Cuando el alumno proporcione respuestas (solicitadas en la pregunta) con menos de n cs, conceda A0. Es posible que el EC requiera algunas respuestas numéricas intermedias que no se hayan solicitado explícitamente en la pregunta. En esos casos, conceda los puntos únicamente si el alumno da la respuesta como valor exacto o con al menos 2 cs.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento incluido en el examen (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

Para la prueba 3 se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadora que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico (p. ej., la TI-89).

Notación de calculadora

La guía de Matemáticas NS dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la de las calculadoras.

No acepte respuestas finales que estén escritas utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el procedimiento.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador sólo ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

1. (a) $581 = 2 \times 259 + 63$ *MIAI*
 $259 = 4 \times 63 + 7$ *AI*
 $63 = 9 \times 7$ *AI*
 por lo tanto, el MCD es 7 *[4 puntos]*

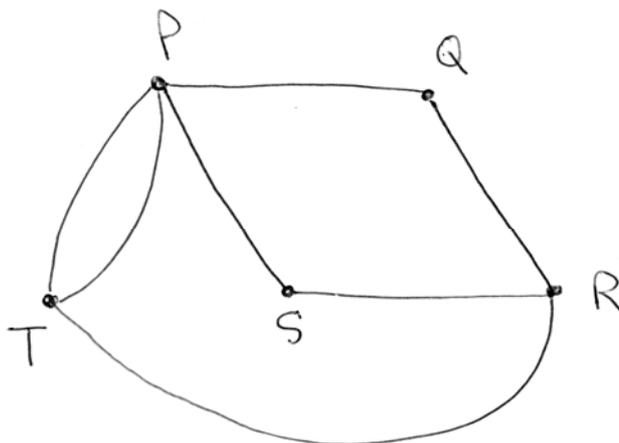
- (b) considerando que *MI*
 $7 = 259 - 4 \times 63$ *AI*
 $= 259 - 4 \times (581 - 2 \times 259)$ *AI*
 $= 259 \times 9 + 581 \times (-4)$ *AI*
 por lo tanto, la solución general es *MIAI*
 $x = 9 + 83n; y = -4 - 37n$ donde $n \in \mathbb{Z}$

Notas: Acepte soluciones dispuestas en forma de tabla. Dividir la ecuación diofántica por 7 es un método igualmente válido.

[5 puntos]

Total [9 puntos]

2. (a)



A2
[2 puntos]

- (b) (i) G no es simple porque hay 2 aristas que unen P y T *RI*
 (ii) G es conexo porque hay un camino que une cada par de vértices *RI*
 (iii) (P, R) y (Q, S, T) son vértices disjuntos *RI*
 por lo tanto G es bipartito *AI*

Nota: Conceda el punto *AI* únicamente si concede el punto *RI*.

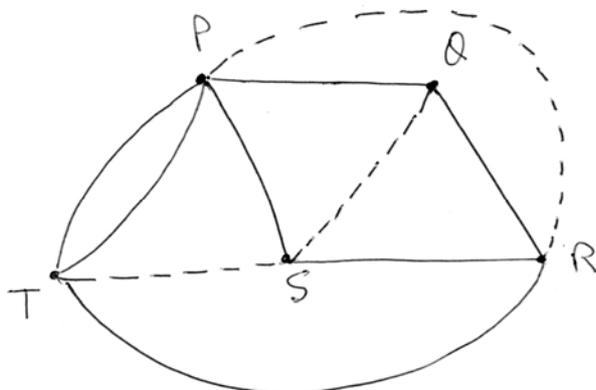
[4 puntos]

- (c) G tiene un sendero euleriano porque tiene dos vértices de grado impar (R y T son de grado 3) el resto de los vértices son de grado par el siguiente es un ejemplo de sendero *RI*
 TPTRSPQR *AI*
[2 puntos]

- (d) G no tiene ningún circuito euleriano porque hay 2 vértices que son de grado impar *RI*
[1 punto]
continúa ...

Continuación de la Pregunta 2

(e) considerando



así pues, se pueden añadir 3 aristas adicionales
 supongamos ahora que eliminamos del grafo G una de las aristas PT ;
 obtenemos un grafo simple con 6 aristas; al añadir las nuevas aristas, sigue
 siendo simple
 $e \leq 3v - 6 \Rightarrow e \leq 3 \times 5 - 6 = 9$
 por lo que, como mucho, se pueden añadir 3 aristas

AI

MI

RI

RI

[4 puntos]

Total [13 puntos]

3. (a) (i) $2^8 = 256 \equiv 4 \pmod{9}$ (así pues, no se cumple)
 9 no es primo

AI

AI

(ii) si considera diversas potencias de 2 y; p. ej., obtiene
 $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9}$
 por lo tanto:
 $2^{45} = (2^6)^7 \times 2^3$
 $\equiv 8 \pmod{9}$ (por lo que $k = 8$)

MI

AI

MI

AI

[6 puntos]

continúa ...

Continuación de la Pregunta 3

(b) **O BIEN**

las soluciones de $3x \equiv 4 \pmod{5}$ son 3, 8, 13, 18, 23, ... *MIAI*
 las soluciones de $5x \equiv 6 \pmod{7}$ son 4, 11, 18, ... *AI*
 por lo tanto, 18 es la menor solución común *AI*
 y la solución general es *MI*
 $18 + 35n, n \in \mathbb{Z}$
 por consiguiente, las soluciones que se piden son 123, 158, 193 *AI*

O BIEN

$3x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow 2 \times 3x \equiv 2 \times 4 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5}$ *AI*
 $\Rightarrow x = 3 + 5t$ *MI*
 $\Rightarrow 15 + 25t \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 4t \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 2 \times 4t \equiv 2 \times 5 \pmod{7} \Rightarrow t \equiv 3 \pmod{7}$ *AI*
 $\Rightarrow t = 3 + 7n$ *AI*
 $\Rightarrow x = 3 + 5(3 + 7n) = 18 + 35n$ *MI*
 por consiguiente, las soluciones que se piden son 123, 158, 193 *AI*

O BIEN

utilizando el método de la fórmula del teorema chino del resto,
 se simplifican primero las congruencias a $x \equiv 3 \pmod{5}$ y $x \equiv 4 \pmod{7}$ *AIAI*
 $M = 35, M_1 = 7, M_2 = 5, m_1 = 5, m_2 = 7, a_1 = 3, a_2 = 4$
 x_1 es la solución de $M_1 x_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$; es decir, $7x_1 \equiv 1 \pmod{5}$,
 con lo que $x_1 = 3$
 x_2 es la solución de $M_2 x_2 \equiv 1 \pmod{m_2}$; es decir, $5x_2 \equiv 1 \pmod{7}$,
 con lo que $x_2 = 3$
 por consiguiente, una solución es *MI*
 $x = a_1 M_1 x_1 + a_2 M_2 x_2$ *AI*
 $= 3 \times 7 \times 3 + 4 \times 5 \times 3 = 123$ *MI*
 y la solución general es $123 + 35n, n \in \mathbb{Z}$ *AI*
 por consiguiente, las soluciones que se piden son 123, 158, 193 *AI*

[6 puntos]

Total [12 puntos]

4. (a) utilizando el algoritmo del vecino más próximo, y comenzando en A,
A → E, E → C
C → D, D → B
B → A
por consiguiente, el límite superior es $9 + 10 + 16 + 13 + 11 = 59$

AI

AI

AI

AI

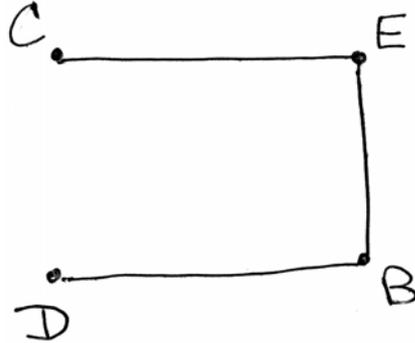
[4 puntos]

- (b) (i) las aristas se añaden siguiendo el orden CE
BD
BE

AI

AI

AI



AI

- (ii) el peso del árbol generador minimal es 37
ahora volvemos a conectar el vértice A con las 2 aristas de menor peso
es decir, AE y AB
por consiguiente, el límite inferior es $37 + 9 + 11 = 57$

(AI)

(MI)

AI

AI

[8 puntos]

Total [12 puntos]

5. (a) la ecuación auxiliar es $m^2 - 5m + 6 = 0$ *MI*
 de donde se obtiene que $m = 2, 3$ *AI*
 la solución general es $u_n = A \times 2^n + B \times 3^n$ *AI*
 sustituyendo $n = 1, 2$
 $2A + 3B = 3$ *MI*
 $4A + 9B = 3$ *AI*
 la solución es $A = 3, B = -1$, con lo que se obtiene que $u_n = 3 \times 2^n - 3^n$ *AI*

[6 puntos]

- (b) demostramos primero que $v_n = 2^n (2n - 1)$ para $n = 1, 2$ *MI*
 para $n = 1$, se obtiene que $2 \times 1 = 2$, lo cual es correcto
 para $n = 2$, se obtiene que $4 \times 3 = 12$, lo cual es correcto *AI*
 supongamos ahora que la relación se cumple para todo $n \leq k$ *MI*
 considerando
 $v_{k+1} = 4v_k - 4v_{k-1} \quad (k \geq 2)$ *MI*
 $= 4 \cdot 2^k (2k - 1) - 4 \cdot 2^{k-1} (2k - 3)$ *AI*
 $= 2^{k+1} (4k - 2 - 2k + 3)$ *AI*
 $= 2^{k+1} (2(k + 1) - 1)$ *AI*
 con esto se demuestra que si la relación se cumple para $n \leq k$,
 entonces también se cumple para $n \leq k + 1$
 dado que también hemos demostrado que se cumple para $n \leq 2$, el
 resultado general queda demostrado por
 inducción *RI*

Nota: El alumno tiene que haber hecho un intento aceptable de acometer el paso de inducción para que se le pueda conceder el **RI** final.

[8 puntos]

Total [14 puntos]



MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ANÁLISIS

EXAMEN DE MUESTRA

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS* para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es [60 puntos].

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 14]

La función f viene dada en el dominio $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ por $f(x) = \ln(1 + \sin x)$.

(a) Muestre que $f''(x) = -\frac{1}{(1 + \sin x)}$. [4 puntos]

(b) (i) Halle la serie de Maclaurin para $f(x)$ hasta el término en x^4 inclusive.

(ii) Explique brevemente por qué el resultado obtenido muestra que f no es ni una función par ni una función impar. [7 puntos]

(c) Determine el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - x}{x^2}$. [3 puntos]

2. [Puntuación máxima: 8]

Considere la ecuación diferencial

$$x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad x > 0, \quad x^2 > y^2.$$

(a) Muestre que se trata de una ecuación diferencial homogénea. [1 punto]

(b) Halle la solución general, expresando la respuesta de la forma $y = f(x)$. [7 puntos]

3. [Puntuación máxima: 15]

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x + y \operatorname{tg} x, \text{ sabiendo que para } x = 0, y = 1.$$

El dominio de la función y es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Hallando los valores de las sucesivas derivadas para $x = 0$, obtenga una serie de Maclaurin para y , hasta el término en x^3 inclusive. [6 puntos]

(b) (i) Derive la función $e^x(\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)$ y , a partir de lo anterior, muestre que

$$\int e^x \operatorname{cos} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) + c.$$

(ii) Halle un factor integrante para la ecuación diferencial y a partir de lo anterior, halle la solución de dicha ecuación, expresándola de la forma $y = f(x)$. [9 puntos]

4. [Puntuación máxima: 10]

Sea $f(x) = 2x + |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestre que en el punto $(0, 0)$ f es continua pero no es derivable. [7 puntos]

(b) Determine el valor de $\int_{-a}^a f(x) \, dx$, donde $a > 0$. [3 puntos]

5. [Puntuación máxima: 13]

Considere la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^n}{n^2 \times 2^n}$.

(a) Halle el radio de convergencia. [4 puntos]

(b) Halle el intervalo de convergencia. [9 puntos]



ESQUEMA DE CALIFICACIÓN

EXAMEN DE MUESTRA

MATEMÁTICAS ANÁLISIS

Nivel Superior

Prueba 3

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede también haber quedado implícito en un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede también haber quedado implícita en un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando **no** se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Escriba las puntuaciones en rojo en el margen derecho de la hoja de examen que contiene las respuestas del alumno.

- Muestre el **desglose** con las puntuaciones individuales concedidas. Utilice para ello las abreviaturas **MI**, **AI**, etc.
- Escriba al final de cada pregunta la puntuación total conseguida en esa **pregunta** y **rodee** dicho valor.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima solo porque la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta según las directrices del esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **AI**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de las puntuaciones **M** precedentes, de haber alguna.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej. **MIAI**), esto normalmente significa **MI** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **AI** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida las puntuaciones.
- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado, ignore todo el procedimiento subsiguiente.

3 Puntuaciones N

Conceda puntos N por respuestas **correctas** que **no** vengan acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos N y de otro tipo de puntuación.
- Es posible que se hayan incluido en una prueba menos puntos N que el total de puntos M , A y R ; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis**; p. ej., (MI). Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la siguiente línea.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando el procedimiento **aparezca por escrito** explícitamente.

5 Puntuación de arrastre de error

Las puntuaciones de arrastre de error (FT , del inglés Follow-Through) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (FT), el alumno **tiene que haber incluido el procedimiento** empleado (no solo una respuesta final basada en una respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos FT si así lo considera oportuno.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen } \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).
- Dentro de un apartado dado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo A **que dependan del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos M si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (MR , del inglés Mis-Read). Aplique a esa pregunta una penalización MR de 1 punto. Puntúe la pregunta siguiendo los criterios habituales y, a continuación, escriba $-1(MR)$ al lado del total. Reste 1 punto del total correspondiente a esa pregunta. A un alumno sólo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado.

- Si a causa del error de lectura (MR) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si así lo considera oportuno.
- Si este error de lectura (MR) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen } \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).

7 Puntuación discrecional (*d*)

En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación. Esta puntuación tiene que estar rotulada con una (**d**) y se ha de incluir al lado de la puntuación una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar siguiendo las directrices que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con su jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados con **MÉTODO 1**, **MÉTODO 2**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante **O BIEN... O BIEN**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas opciones.

9 Formas alternativas

A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **accepte** formas equivalentes.

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos a menudo no incluyen en los exámenes) aparecen normalmente escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta o bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (si es que la ha incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\sin(5x - 3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x - 3))5 \quad (= 10\cos(5x - 3)) \quad \text{AI}$$

Se ha de conceder **AI** por $(2\cos(5x - 3))5$, incluso aunque el alumno no haya escrito $10\cos(5x - 3)$.

10 Precisión de las respuestas

El método para abordar los errores de precisión a nivel global, de todo el examen, por medio de Penalizaciones de Precisión (AP, del inglés Accuracy Penalty) ya no es válido.

A los examinadores se les facilitarán, para cada pregunta donde resulte pertinente, las instrucciones (específicas para esa pregunta) relativas a dichos aspectos numéricos, siempre dentro del marco de la corrección matemática, la comprensión numérica y la adecuación contextual.

Las instrucciones que aparecen en la portada de cada cuestionario de examen se incluyen para que le sirvan de orientación al alumno. En ocasiones, el esquema de calificación (EC) contiene instrucciones para el examinador del tipo “Acepte respuestas que se hayan redondeado a n cifras significativas (cs)”. Cuando el alumno proporcione respuestas (solicitadas en la pregunta) con menos de n cs, conceda A0. Es posible que el EC requiera algunas respuestas numéricas intermedias que no se hayan solicitado explícitamente en la pregunta. En esos casos, conceda los puntos únicamente si el alumno da la respuesta como valor exacto o con al menos 2 cs.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento incluido en el examen (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

Para la prueba 3 se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadora que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico (p. ej., la TI-89).

Notación de calculadora

La guía de Matemáticas NS dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la de las calculadoras.

No acepte respuestas finales que estén escritas utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el procedimiento.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador sólo ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

1. (a) $f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$ *AI*

$f''(x) = \frac{-\operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen} x) - \cos x \cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$ *MIAI*

$= \frac{-\operatorname{sen} x - (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$ *AI*

$= -\frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$ *AG*

[4 puntos]

(b) (i) $f'''(x) = \frac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}$ *AI*

$f^{(4)}(x) = \frac{-\operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen} x)^2 - 2(1 + \operatorname{sen} x)\cos^2 x}{(1 + \operatorname{sen} x)^4}$ *MIAI*

$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1$ *MI*

$f'''(0) = 1, f^{(4)}(0) = -2$ *AI*

$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \dots$ *AI*

(ii) la serie contiene potencias de x tanto pares como impares *RI*

[7 puntos]

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots - x}{x^2}$ *MI*

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \dots}{1}$ *(AI)*

$= -\frac{1}{2}$ *AI*

Nota: El uso de la regla de l'Hôpital también es aceptable.

[3 puntos]

Total [14 puntos]

2. (a) la ecuación se puede re-escribir del siguiente modo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad \text{AI}$$

con lo que se puede concluir que la ecuación diferencial es homogénea AG

[1 punto]

- (b) se toma $y = vx$ de modo que se obtiene $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ MIAI

sustituyendo,

$$v + x \frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 - v^2} \quad \text{MI}$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \int \frac{dx}{x} \quad \text{MI}$$

$$\arcsen v = \ln x + C \quad \text{AI}$$

$$\frac{y}{x} = \text{sen}(\ln x + C) \quad \text{AI}$$

$$y = x \text{sen}(\ln x + C) \quad \text{AI}$$

[7 puntos]

Total [8 puntos]

3. (a) vemos que $y(0) = 1$ y que $y'(0) = 2$ *AI*
 $y'' = 2e^x + y' \operatorname{tg} x + y \sec^2 x$ *MI*
 $y''(0) = 3$ *AI*
 $y''' = 2e^x + y'' \operatorname{tg} x + 2y' \sec^2 x + 2y \sec^2 x \operatorname{tg} x$ *MI*
 $y'''(0) = 6$ *AI*
 por consiguiente, la serie de Maclaurin pedida es
 $y = 1 + 2x + \frac{3x^2}{2} + x^3 + \dots$ *AI*
- [6 puntos]**
- (b) (i) $\frac{d}{dx}(e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$ *MI*
 $= 2e^x \cos x$ *AI*
 de lo que se deduce que
 $\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + c$ *AG*
- (ii) la ecuación diferencial se puede escribir del siguiente modo:
 $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = 2e^x$ *MI*
 $FI = e^{\int -\operatorname{tg} x \, dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x$ *MIAI*
 $\cos x \frac{dy}{dx} - y \operatorname{sen} x = 2e^x \cos x$ *MI*
 e integrando,
 $y \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$ *AI*
 $y = 1$ cuando $x = 0$, de donde se obtiene que $C = 0$ *MI*
 por lo tanto
 $y = e^x(1 + \operatorname{tg} x)$ *AI*
- [9 puntos]**
- Total [15 puntos]**

4. (a) vemos que $f(0)=0$, $f(x)=3x$ para $x > 0$ y $f(x)=x$ para $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

MIAI

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0$$

AI

dado que $f(0)=0$, la función es continua en $x=0$

AG

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

MIAI

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h}{h} = 3$$

AI

estos límites no son iguales

RI

con lo que f no es derivable en $x=0$

AG

[7 puntos]

(b)
$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 x dx + \int_0^a 3x dx$$

MI

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a}^0 + \left[\frac{3x^2}{2} \right]_0^a$$

AI

$$= a^2$$

AI

[3 puntos]

Total [10 puntos]

5. (a) utilizando el criterio de D'Alembert, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{nx^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \times \frac{n^2 2^n}{(n-1)x^n}$ *MI*

$$= \frac{n^3}{(n+1)^2(n-1)} \times \frac{x}{2}$$
 AI

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{2}$ *AI*

el radio de convergencia R satisface que

$\frac{R}{2} = 1$ de modo que $R = 2$ *AI*

[4 puntos]

(b) considerando $x = 2$, para el cual la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n^2}$$

utilizando el criterio de comparación del límite con la serie armónica *MI*

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge

considerando

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$ *AI*

por consiguiente, la serie es divergente para $x = 2$ *AI*

para $x = -2$, la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n^2} \times (-1)^n$$

se trata de una serie alternada, en la cual el término n -ésimo tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$ *AI*

considerando $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ *MI*

$f'(x) = \frac{2-x}{x^3}$ *AI*

que es negativa para $x > 2$, de modo que la progresión $\{|u_n|\}$ al final es decreciente *RI*

y, por consiguiente, hemos demostrado mediante el criterio de las series alternadas que la serie converge para $x = -2$ *RI*

por tanto, el intervalo de convergencia es $[-2, 2[$ *AI*

[9 puntos]

Total [13 puntos]



MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

EXAMEN DE MUESTRA

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS* para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es [60 puntos].

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 14]

- (a) La relación R viene dada sobre \mathbb{Z}^+ por aRb si y solo si ab es par. Muestre que solo se satisface una de las condiciones necesarias para que R sea una relación de equivalencia. [5 puntos]

- (b) La relación S viene dada sobre \mathbb{Z}^+ por aSb si y solo si $a^2 \equiv b^2 \pmod{6}$.
 - (i) Muestre que S es una relación de equivalencia.

 - (ii) Escriba los cuatro elementos más pequeños de cada clase de equivalencia. [9 puntos]

2. [Puntuación máxima: 13]

Las operaciones binarias \odot y $*$ vienen dadas sobre \mathbb{R}^+ por

$$a \odot b = \sqrt{ab} \text{ y } a * b = a^2 b^2.$$

Determine si

- (a) \odot es o no conmutativa; [2 puntos]

- (b) $*$ es o no asociativa; [4 puntos]

- (c) $*$ es o no distributiva respecto a \odot ; [4 puntos]

- (d) \odot tiene o no un elemento neutro. [3 puntos]

3. [Puntuación máxima: 16]

El grupo $\{G, \times_7\}$ se define sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donde \times_7 denota la multiplicación módulo 7.

- (a) (i) Escriba la tabla de Cayley para $\{G, \times_7\}$.
- (ii) Determine si $\{G, \times_7\}$ es o no cíclico.
- (iii) Halle el subgrupo de G de orden 3, y denomínelo H .
- (iv) Identifique el elemento de orden 2 que hay en G y halle su clase lateral con respecto a H . [10 puntos]

(b) El grupo $\{K, \circ\}$ se define sobre las seis permutaciones de los números enteros 1, 2, 3 y \circ denota la composición de permutaciones.

- (i) Compruebe que $\{K, \circ\}$ es no abeliano.
- (ii) Indique si $\{G, \times_7\}$ y $\{K, \circ\}$ son o no isomorfos. Justifique su respuesta. [6 puntos]

4. [Puntuación máxima: 9]

Los grupos $\{G, *\}$ y $\{H, \odot\}$ se definen por medio de las siguientes tablas de Cayley.

G

*	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>E</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	<i>A</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>E</i>
<i>C</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>A</i>

H

\odot	<i>e</i>	<i>a</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>e</i>

Muestre que existe un homomorfismo sobreyectivo entre G y H ; para ello, considere una función adecuada de G en H . Indique el núcleo de este homomorfismo.

5. [Puntuación máxima: 8]

Sea $\{G, *\}$ un grupo finito y sea H un subconjunto no vacío de G . Demuestre que $\{H, *\}$ es un grupo si H es cerrado para $*$.



ESQUEMA DE CALIFICACIÓN

EXAMEN DE MUESTRA

MATEMÁTICAS CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Nivel Superior

Prueba 3

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede también haber quedado implícito en un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede también haber quedado implícita en un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando **no** se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Escriba las puntuaciones en rojo en el margen derecho de la hoja de examen que contiene las respuestas del alumno.

- Muestre el **desglose** con las puntuaciones individuales concedidas. Utilice para ello las abreviaturas **MI**, **AI**, etc.
- Escriba al final de cada pregunta la puntuación total conseguida en esa **pregunta** y **rodee** dicho valor.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima solo porque la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta según las directrices del esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **AI**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de las puntuaciones **M** precedentes, de haber alguna.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej. **MIAI**), esto normalmente significa **MI** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **AI** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida las puntuaciones.
- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado, ignore todo el procedimiento subsiguiente.

3 Puntuaciones N

Conceda puntos N por respuestas **correctas** que **no** vengan acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos N y de otro tipo de puntuación.
- Es posible que se hayan incluido en una prueba menos puntos N que el total de puntos M , A y R ; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis**; p. ej., (MI). Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la siguiente línea.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando el procedimiento **aparezca por escrito** explícitamente.

5 Puntuación de arrastre de error

Las puntuaciones de arrastre de error (FT , del inglés Follow-Through) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (FT), el alumno **tiene que haber incluido el procedimiento** empleado (no solo una respuesta final basada en una respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos FT si así lo considera oportuno.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen } \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).
- Dentro de un apartado dado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo A **que dependan del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos M si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (MR , del inglés Mis-Read). Aplique a esa pregunta una penalización MR de 1 punto. Puntúe la pregunta siguiendo los criterios habituales y, a continuación, escriba $-1(MR)$ al lado del total. Reste 1 punto del total correspondiente a esa pregunta. A un alumno sólo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado.

- Si a causa del error de lectura (MR) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si así lo considera oportuno.
- Si este error de lectura (MR) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen } \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).

7 Puntuación discrecional (*d*)

En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación. Esta puntuación tiene que estar rotulada con una (**d**) y se ha de incluir al lado de la puntuación una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar siguiendo las directrices que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con su jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados con **MÉTODO 1**, **MÉTODO 2**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante **O BIEN... O BIEN**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas opciones.

9 Formas alternativas

A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **accepte** formas equivalentes.

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos a menudo no incluyen en los exámenes) aparecen normalmente escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta o bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (si es que la ha incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\sin(5x - 3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x - 3))5 \quad (= 10\cos(5x - 3)) \quad \text{AI}$$

Se ha de conceder **AI** por $(2\cos(5x - 3))5$, incluso aunque el alumno no haya escrito $10\cos(5x - 3)$.

10 Precisión de las respuestas

El método para abordar los errores de precisión a nivel global, de todo el examen, por medio de Penalizaciones de Precisión (AP, del inglés Accuracy Penalty) ya no es válido.

A los examinadores se les facilitarán, para cada pregunta donde resulte pertinente, las instrucciones (específicas para esa pregunta) relativas a dichos aspectos numéricos, siempre dentro del marco de la corrección matemática, la comprensión numérica y la adecuación contextual.

Las instrucciones que aparecen en la portada de cada cuestionario de examen se incluyen para que le sirvan de orientación al alumno. En ocasiones, el esquema de calificación (EC) contiene instrucciones para el examinador del tipo “Acepte respuestas que se hayan redondeado a n cifras significativas (cs)”. Cuando el alumno proporcione respuestas (solicitadas en la pregunta) con menos de n cs, conceda A0. Es posible que el EC requiera algunas respuestas numéricas intermedias que no se hayan solicitado explícitamente en la pregunta. En esos casos, conceda los puntos únicamente si el alumno da la respuesta como valor exacto o con al menos 2 cs.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento incluido en el examen (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

Para la prueba 3 se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadora que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico (p. ej., la TI-89).

Notación de calculadora

La guía de Matemáticas NS dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la de las calculadoras.

No acepte respuestas finales que estén escritas utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el procedimiento.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador sólo ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

1. (a) reflexiva: si a es impar, $a \times a$ es impar, por lo que R no es reflexiva **RI**
 simétrica: si ab es par, entonces ba es par, con lo que R es simétrica **RI**
 transitiva: sean aRb y bRc ; tenemos que determinar si aRc o no **(MI)**
 por ejemplo, $5R2$ y $2R3$ **AI**
 dado que 5×3 no es par, 5 no está relacionado con 3 y por tanto R no es transitiva **RI**
[5 puntos]
- (b) (i) reflexiva: $a^2 \equiv a^2 \pmod{6}$, así que S es reflexiva **RI**
 simétrica: $a^2 \equiv b^2 \pmod{6} \Rightarrow 6 | (a^2 - b^2) \Rightarrow 6 | (b^2 - a^2) \Rightarrow b^2 \equiv a^2 \pmod{6}$ **RI**
 de modo que S es simétrica
 transitiva: sean aSb y bSc , de modo que $a^2 = b^2 + 6M$ y $b^2 = c^2 + 6N$ **MI**
 de lo que se deduce que $a^2 = c^2 + 6(M + N)$, con lo que aSc y, por lo tanto, S es transitiva **RI**
 S es una relación de equivalencia porque satisface las tres condiciones **AG**
- (ii) considerando los cuadrados de números enteros (mod 6), **(MI)**
 las clases de equivalencia son
- {1, 5, 7, 11, ...} **AI**
 {2, 4, 8, 10, ...} **AI**
 {3, 9, 15, 21, ...} **AI**
 {6, 12, 18, 24, ...} **AI**
[9 puntos]
- Total [14 puntos]**
2. (a) $a \odot b = \sqrt{ab} = \sqrt{ba} = b \odot a$ **AI**
 dado que $a \odot b = b \odot a$, se deduce que \odot es conmutativa **RI**
[2 puntos]
- (b) $a * (b * c) = a * b^2 c^2 = a^2 b^4 c^4$ **MIAI**
 $(a * b) * c = a^2 b^2 * c = a^4 b^4 c^2$ **AI**
 estas dos expresiones son distintas y, por tanto, $*$ no es asociativa **RI**
- Nota:** Acepte también un contraejemplo numérico.
- [4 puntos]**
- (c) $a * (b \odot c) = a * \sqrt{bc} = a^2 bc$ **MIAI**
 $(a * b) \odot (a * c) = a^2 b^2 \odot a^2 c^2 = a^2 bc$ **AI**
 estas dos expresiones son iguales; por tanto, $*$ es distributiva respecto a \odot **RI**
[4 puntos]

continúa ...

Continuación de la Pregunta 2

- (d) el elemento neutro e tendría que satisfacer la igualdad $a \odot e = a$ para todo a
 por otro lado, $a \odot e = \sqrt{ae} = a \Rightarrow e = a$
 por lo tanto no existe elemento neutro

MI
AI
RI
[3 puntos]

Total [13 puntos]

3. (a) (i) la tabla de Cayley es

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

A3

Nota: Quite 1 punto por cada error cometido, hasta un máximo de 3.

- (ii) considerando potencias de elementos, se deduce que 3 (o 5) es de orden 6 de modo que el grupo es cíclico
- (iii) vemos que 2 y 4 son de orden 3, de modo que el subgrupo de orden 3 es {1, 2, 4}
- (iv) el elemento de orden 2 es 6 la clase lateral es {3, 5, 6}

(MI)
AI
AI

MIAI

AI
AI

[10 puntos]

- (b) (i) considere por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

MIAI

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

MIAI

Nota: Conceda **MIAIMIA0** si el alumno ha hecho ambas composiciones en el orden incorrecto.

Nota: Conceda **MIAIM0A0** si las dos composiciones dan el mismo resultado, y el alumno no hace ningún intento más de encontrar dos permutaciones que no sean conmutativas.

estas dos expresiones son distintas, por lo que el grupo es no abeliano **RIAG**

- (ii) no son isomorfos porque $\{G, \times_7\}$ es abeliano y $\{K, \circ\}$ no lo es

RI

[6 puntos]

Total [16 puntos]

4. considere la función f que viene dada por

$$f(E) = e$$

$$f(A) = e$$

$$f(B) = a$$

$$f(C) = a$$

MIAI

a continuación, tenemos que mostrar que

$$f(X * Y) = f(X) \odot f(Y) \text{ para todo } X, Y \in G$$

(MI)

considerando

$$f((E \circ A) * (E \circ A)) = f(E \circ A) = e; f(E \circ A) \odot f(E \circ A) = e \odot e = e$$

MIAI

$$f((E \circ A) * (B \circ C)) = f(B \circ C) = a; f(E \circ A) \odot f(B \circ C) = e \odot a = a$$

AI

$$f((B \circ C) * (B \circ C)) = f(E \circ A) = e; f(B \circ C) \odot f(B \circ C) = a \odot a = e$$

AI

dado que los grupos son abelianos, no es necesario que consideremos

$$f((B \circ C) * (E \circ A))$$

RI

en todos los casos se satisface la propiedad necesaria, por lo que existe un homomorfismo

Nota: También es aceptable una demostración exhaustiva en la que se utilicen tablas.

el núcleo es $\{E, A\}$

AI

[9 puntos]

5. la propiedad asociativa se cumple, porque se cumple en G

RI

H es cerrado (esto viene dado)

RI

sea $h \in H$ y sea n el orden de h , (este valor es finito porque G es finito)

MI

esto implica que $h^n = e$, el elemento neutro

RI

y dado que H es cerrado, $e \in H$

RI

dado que $h * h^{n-1} = e$

MI

se deduce que h^{n-1} es el simétrico de h es decir, h^{-1}

RI

y dado que H es cerrado, $h^{-1} \in H$, por lo que cada elemento de H tiene simétrico

RI

por lo tanto, se satisfacen los cuatro requisitos para que H sea un grupo

AG

[8 puntos]



MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

EXAMEN DE MUESTRA

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS* para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es [60 puntos].

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 10]*

Un comprador compra 12 manzanas en uno de los puestos del mercado. Las pesa y obtiene los siguientes resultados (en gramos).

117, 124, 129, 118, 124, 116, 121, 126, 118, 121, 122, 129

Puede suponer que se trata de una muestra aleatoria tomada de una distribución normal de media μ y varianza σ^2 .

- (a) Determine estimaciones sin sesgo de μ y de σ^2 . *[3 puntos]*
- (b) Determine un intervalo de confianza del 99 % para μ . *[2 puntos]*
- (c) El dueño del puesto afirma que la media del peso de las manzanas es igual a 125 gramos, mientras que el comprador afirma que la media es menor que este valor.
 - (i) Indique las hipótesis apropiadas para contrastar estas afirmaciones.
 - (ii) Calcule para la muestra anteriormente descrita el valor del parámetro p .
 - (iii) Indique cuál de las afirmaciones está respaldada por el valor del parámetro p que acaba de obtener, utilizando un nivel de significación del 5 %. Justifique su respuesta. *[5 puntos]*

2. [Puntuación máxima: 12]

Cuando Andrew tira un dardo a la diana, la probabilidad de que dé en la diana es $\frac{1}{3}$;

cuando Bill tira un dardo, la probabilidad de que dé en la diana es $\frac{1}{4}$.

Los lanzamientos sucesivos son independientes entre sí. Una noche se ponen a jugar a la diana, tirando por turnos un dardo y comenzando por Andrew. El juego se acaba en el momento en que uno de los dardos da en la diana. Sea X el número total de dardos que se han tirado.

(a) Escriba el valor de $P(X = 1)$ y muestre que $P(X = 2) = \frac{1}{6}$. [2 puntos]

(b) Muestre que la función generatriz de probabilidad para X viene dada por

$$G(t) = \frac{2t + t^2}{6 - 3t^2}. \quad [6 \text{ puntos}]$$

(c) A partir de lo anterior, determine $E(X)$. [4 puntos]

3. [Puntuación máxima: 9]

Se sabe que los pesos de los monos adultos de una especie determinada siguen una distribución normal, de media 30 kg y desviación típica 3 kg para los machos y de media 20 kg y desviación típica 2,5 kg para las hembras.

(a) Halle la probabilidad de que el peso de un macho elegido al azar sea más del doble del peso de una hembra elegida al azar. [5 puntos]

(b) Dos machos y cinco hembras se suben juntos a una báscula. Halle la probabilidad de que el peso total sea menor que 175 kg. [4 puntos]

4. [Puntuación máxima: 15]

Los alumnos de un curso hacen un examen de Matemática Aplicada que consta de dos pruebas. La Prueba 1 es de Mecánica y la Prueba 2 es de Estadística. Sean (x, y) las notas obtenidas por los alumnos en la Prueba 1 y en la Prueba 2, respectivamente. Puede suponer que los valores de (x, y) constituyen una muestra aleatoria tomada de una distribución normal bidimensional con coeficiente de correlación ρ . El profesor desea determinar si existe o no una asociación positiva entre las notas de Mecánica y las notas de Estadística.

(a) Indique las hipótesis apropiadas.

[1 punto]

Las notas obtenidas por los 12 alumnos que se presentaron a ambas pruebas se muestran en la siguiente tabla:

Alumno	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
x	52	47	82	69	38	50	72	46	23	60	42	53
y	55	44	79	62	41	37	71	44	31	45	47	49

(b) (i) Determine el coeficiente de correlación momento-producto para estos datos e indique el valor del parámetro ρ correspondiente.

(ii) Interprete, en el contexto de este problema, el valor del parámetro ρ que ha obtenido.

[5 puntos]

(c) George obtuvo una nota de 63 en la Prueba 1 pero no se pudo presentar a la Prueba 2 porque estaba enfermo. Prediga la nota que habría obtenido en la Prueba 2.

[4 puntos]

(d) Otra clase compuesta por 16 alumnos ha hecho un examen de Física y otro de Química. Se halló que el coeficiente de correlación momento-producto entre las notas de estas dos asignaturas es igual a 0,524. Utilizando un nivel de significación del 1 %, determine si este valor sugiere o no que exista una asociación positiva entre las notas de Física y las notas de Química.

[5 puntos]

5. [Puntuación máxima: 14]

La variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad, donde $0 < \theta < \frac{1}{3}$.

x	1	2	3
$P(X = x)$	θ	2θ	$1 - 3\theta$

- (a) Determine $E(X)$ y muestre que $\text{Var}(X) = 6\theta - 16\theta^2$. [4 puntos]

Con el fin de estimar el valor de θ , se obtiene de la distribución de X una muestra aleatoria compuesta por n observaciones.

- (b) (i) Sabiendo que \bar{X} denota la media de esta muestra, muestre que

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3 - \bar{X}}{4}$$

es un estimador sin sesgo para θ y escriba una expresión para la varianza de $\hat{\theta}_1$ en función de n y de θ .

- (ii) Sea Y el número de observaciones de la muestra cuyo resultado es igual a 1. Muestre que Y tiene la distribución binomial $B(n, \theta)$ y deduzca que

$\hat{\theta}_2 = \frac{Y}{n}$ es también un estimador sin sesgo para θ . Obtenga una expresión para la varianza de $\hat{\theta}_2$.

- (iii) Muestre que $\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}_2)$ e indique, justificando su respuesta, cuál es el estimador más eficiente, $\hat{\theta}_1$ o $\hat{\theta}_2$. [10 puntos]



ESQUEMA DE CALIFICACIÓN

EXAMEN DE MUESTRA

MATEMÁTICAS ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Nivel Superior

Prueba 3

Instrucciones para los Examinadores

Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un **Método** correcto; el procedimiento tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede también haber quedado implícito en un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una **Respuesta** (en inglés, *Answer*) o por **Precisión** (en inglés, *Accuracy*); a menudo dependen de las puntuaciones **M** precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede también haber quedado implícita en un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando **no** se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés *answer given*) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

Uso del esquema de calificación

1 General

Escriba las puntuaciones en rojo en el margen derecho de la hoja de examen que contiene las respuestas del alumno.

- Muestre el **desglose** con las puntuaciones individuales concedidas. Utilice para ello las abreviaturas **MI**, **AI**, etc.
- Escriba al final de cada pregunta la puntuación total conseguida en esa **pregunta** y **rodee** dicho valor.

2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima solo porque la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta según las directrices del esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **AI**, puesto que las puntuaciones **A** dependen de las puntuaciones **M** precedentes, de haber alguna.
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej. **MIAI**), esto normalmente significa **MI** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **AI** por utilizar los valores **correctos**.
- Allí donde el esquema de calificación especifique (**M2**), **N3**, etc., **no** subdivida las puntuaciones.
- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado, ignore todo el procedimiento subsiguiente.

3 Puntuaciones N

Conceda puntos N por respuestas **correctas** que **no** vengan acompañadas de ningún procedimiento.

- **No** conceda una mezcla de puntos N y de otro tipo de puntuación.
- Es posible que se hayan incluido en una prueba menos puntos N que el total de puntos M , A y R ; esto se hace a propósito, puesto que así se penaliza a los alumnos por no seguir las instrucciones que especifican que se ha de mostrar el procedimiento seguido.

4 Puntuaciones implícitas

Las puntuaciones implícitas se muestran entre **paréntesis**; p. ej., (MI). Solo se pueden conceder si aparece incluido el procedimiento **correcto** o si dicho procedimiento ha quedado implícito en otro procedimiento posterior.

- Normalmente el procedimiento correcto aparece escrito o queda implícito en la siguiente línea.
- Las puntuaciones **sin** paréntesis solo se pueden conceder cuando el procedimiento **aparezca por escrito** explícitamente.

5 Puntuación de arrastre de error

Las puntuaciones de arrastre de error (FT , del inglés Follow-Through) se conceden cuando tras dar una respuesta incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados **subsiguientes**. Para poder conceder puntos de arrastre de error (FT), el alumno **tiene que haber incluido el procedimiento** empleado (no solo una respuesta final basada en una respuesta incorrecta dada en un apartado anterior).

- Si a causa del error cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos FT si así lo considera oportuno.
- Si este error conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen } \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).
- Dentro de un apartado dado de una pregunta, una vez que se comete un error ya no se puede conceder ningún punto más de tipo A **que dependan del punto A no concedido**. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos M si resulta oportuno.
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.

6 Error de lectura

Si un alumno comete un error al copiar en su hoja los datos de la pregunta, esto se considera un “error de lectura” (MR , del inglés Mis-Read). Aplique a esa pregunta una penalización MR de 1 punto. Puntúe la pregunta siguiendo los criterios habituales y, a continuación, escriba $-1(MR)$ al lado del total. Reste 1 punto del total correspondiente a esa pregunta. A un alumno sólo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado.

- Si a causa del error de lectura (MR) cometido la pregunta resulta mucho más sencilla de resolver, utilice su propio criterio y conceda menos puntos si así lo considera oportuno.
- Si este error de lectura (MR) conduce a un resultado inadecuado (p. ej., $\text{sen } \theta = 1,5$), no conceda la o las puntuaciones correspondientes a la(s) respuesta(s) final(es).

7 Puntuación discrecional (*d*)

En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación. Esta puntuación tiene que estar rotulada con una (**d**) y se ha de incluir al lado de la puntuación una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.

8 Métodos alternativos

En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se ha de puntuar siguiendo las directrices que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con su jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados con **MÉTODO 1**, **MÉTODO 2**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado dado de una pregunta se indican mediante **O BIEN... O BIEN**.
- Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas opciones.

9 Formas alternativas

A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **accepte** formas equivalentes.

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos a menudo no incluyen en los exámenes) aparecen normalmente escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta o bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (si es que la ha incluido).

Ejemplo: por derivar $f(x) = 2\sin(5x - 3)$, el esquema de calificación dice:

$$f'(x) = (2\cos(5x - 3))5 \quad (= 10\cos(5x - 3)) \quad \text{AI}$$

Se ha de conceder **AI** por $(2\cos(5x - 3))5$, incluso aunque el alumno no haya escrito $10\cos(5x - 3)$.

10 Precisión de las respuestas

El método para abordar los errores de precisión a nivel global, de todo el examen, por medio de Penalizaciones de Precisión (AP, del inglés Accuracy Penalty) ya no es válido.

A los examinadores se les facilitarán, para cada pregunta donde resulte pertinente, las instrucciones (específicas para esa pregunta) relativas a dichos aspectos numéricos, siempre dentro del marco de la corrección matemática, la comprensión numérica y la adecuación contextual.

Las instrucciones que aparecen en la portada de cada cuestionario de examen se incluyen para que le sirvan de orientación al alumno. En ocasiones, el esquema de calificación (EC) contiene instrucciones para el examinador del tipo “Acepte respuestas que se hayan redondeado a n cifras significativas (cs)”. Cuando el alumno proporcione respuestas (solicitadas en la pregunta) con menos de n cs, conceda A0. Es posible que el EC requiera algunas respuestas numéricas intermedias que no se hayan solicitado explícitamente en la pregunta. En esos casos, conceda los puntos únicamente si el alumno da la respuesta como valor exacto o con al menos 2 cs.

11 Procedimiento tachado

Si el alumno ha trazado una línea cubriendo parte del procedimiento incluido en el examen (en las hojas que contienen las respuestas del alumno), o si de algún otro modo ha tachado parte del procedimiento escrito, no conceda ningún punto por esa parte del procedimiento.

12 Calculadoras

Para la prueba 3 se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no están permitidas aquellas calculadora que permitan hacer operaciones de cálculo simbólico (p. ej., la TI-89).

Notación de calculadora

La guía de Matemáticas NS dice lo siguiente:

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta y no la de las calculadoras.

No acepte respuestas finales que estén escritas utilizando notación de calculadora. Sin embargo, no penalice el uso de notación de calculadora durante el procedimiento.

13 Más de una solución

Cuando un alumno proporcione dos (o más) respuestas distintas a una misma pregunta, el examinador sólo ha de puntuar la primera respuesta, a no ser que el alumno haya indicado lo contrario.

1. (a) una estimación sin sesgo de $\mu = 122$ AI
 una estimación sin sesgo de $\sigma^2 = 4,4406\dots^2 = 19,7$ (MI)AI

Nota: Conceda (MI)A0 si la respuesta es 4,44.

[3 puntos]

- (b) el intervalo de confianza del 99% para μ es [118, 126] AIAI

[2 puntos]

- (c) (i) $H_0 : \mu = 125; H_1 : \mu < 125$ AI

- (ii) valor del parámetro $p = 0,0220$ A2

- (iii) queda respaldada la afirmación del dueño del puesto porque $0,0220 < 0,05$ AIRI

[5 puntos]

Total [10 puntos]

2. (a) $P(X = 1) = \frac{1}{3}$ AI

$P(X = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$ AI

$= \frac{1}{6}$ AG

[2 puntos]

- (b) $G(t) = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}t^2 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}t^4 + \dots$ MIAI

$= \frac{1}{3}t \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \dots \right) + \frac{1}{6}t^2 \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \dots \right)$ MIAI

$= \frac{\frac{t}{3}}{1 - \frac{t^2}{2}} + \frac{\frac{t^2}{6}}{1 - \frac{t^2}{2}}$ AIAI

$= \frac{2t + t^2}{6 - 3t^2}$ AG

[6 puntos]

- (c) $G'(t) = \frac{(2 + 2t)(6 - 3t^2) + 6t(2t + t^2)}{(6 - 3t^2)^2}$ MIAI

$E(X) = G'(1) = \frac{10}{3}$ MIAI

[4 puntos]

Total [12 puntos]

3. (a) el enunciado dice que $M \sim N(30, 9)$ y $H \sim N(20, 6,25)$
 sea $X = M - 2H$; $X \sim N(-10, 34)$ *MIAIAI*
 necesitamos calcular $P(X > 0)$ *(MI)*
 $= 0,0432$ *AI*
[5 puntos]
- (b) sea $Y = M_1 + M_2 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5$, $Y \sim N(160, 49,25)$ *MIAIAI*
 necesitamos calcular $P(Y < 175) = 0,984$ *AI*
[4 puntos]
- Total [9 puntos]*
4. (a) $H_0 : \rho = 0$; $H_1 : \rho > 0$ *AI*
[1 punto]
- (b) (i) coeficiente de correlación $= 0,905$ *A2*
 valor del parámetro $p = 2,61 \times 10^{-5}$ *A2*
- (ii) hay indicios muy contundentes que indican la existencia de una
 asociación positiva entre las notas de Mecánica y las notas de Estadística *RI*
[5 puntos]
- (c) la recta de regresión de y sobre x es $y = 8,71 + 0,789x$ *(MI)AI*
 la nota estimada de George en la Prueba 2 $= 8,71 + 0,789 \times 63$ *(MI)*
 $= 58$ *AI*
[4 puntos]
- (d) $t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 2,3019\dots$ *MIAI*
 grados de libertad $= 14$ *(AI)*
 valor del parámetro $p = 0,0186\dots$ *AI*
 a un nivel de significación del 1%, este resultado no indica que exista una
 asociación positiva entre las notas de Física y las de Química *RI*
[5 puntos]
- Total [15 puntos]*

5. (a) $E(X) = 1 \times \theta + 2 \times 2\theta + 3(1 - 3\theta) = 3 - 4\theta$ *MIAI*
 $Var(X) = 1 \times \theta + 4 \times 2\theta + 9(1 - 3\theta) - (3 - 4\theta)^2$ *MIAI*
 $= 6\theta - 16\theta^2$ *AG*
[4 puntos]
- (b) (i) $E(\hat{\theta}_1) = \frac{3 - E(\bar{X})}{4} = \frac{3 - (3 - 4\theta)}{4} = \theta$ *MIAI*
de modo que $\hat{\theta}_1$ es un estimador sin sesgo de θ *AG*
 $Var(\hat{\theta}_1) = \frac{6\theta - 16\theta^2}{16n}$ *AI*
- (ii) para cada uno de los n valores observados, hay una probabilidad θ de que el valor sea igual a 1 *RI*
de modo que $Y \sim B(n, \theta)$ *AG*
 $E(\hat{\theta}_2) = \frac{E(Y)}{n} = \frac{n\theta}{n} = \theta$ *AI*
 $Var(\hat{\theta}_2) = \frac{n\theta(1-\theta)}{n^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ *MIAI*
- (iii) $Var(\hat{\theta}_1) - Var(\hat{\theta}_2) = \frac{6\theta - 16\theta^2 - 16\theta + 16\theta^2}{16n}$ *MI*
 $= \frac{-10\theta}{16n} < 0$ *AI*
 $\hat{\theta}_1$ es el estimador más eficiente porque es el que tiene la varianza más pequeña *RI*
[10 puntos]
- Total [14 puntos]**
-